



TITLE:

# 正則関数の空間上のFredholm作用素について(Hardy空間の研究: 函数環と関連して)

AUTHOR(S):

羽鳥, 理

---

CITATION:

羽鳥, 理. 正則関数の空間上のFredholm作用素について(Hardy空間の研究: 函数環と関連して). 数理解析研究所講究録 1993, 825: 89-94

ISSUE DATE:

1993-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83266>

RIGHT:

## 正則関数の空間上の Fredholm 作用素について

東京医科大学 羽鳥 理 (Osamu Hatori)

序。H. J. Schwartz [4] は単位円板  $\Delta$  上の Hardy 空間  $H^2$  上の合成作用素  $C_\varphi$  が可逆であることと、 $\varphi$  が  $\Delta$  上の conformal automorphism であることが同値であることを示した。J. A. Cima, J. E. Thomson and W. R. Wogen [2] は、 $H^2$  上の Fredholm 合成作用素は可逆なものに限ることを示した。よって  $H^2$  上の合成作用素  $C_\varphi$  について、Fredholm 作用素であることと、可逆であることと conformal automorphism であることは皆同値である。さらに、P. S. Bourdon [1] は同様の結果が  $\Delta$  上の  $H^p$ 、円板環、Bergman 空間等についても成立すると述べている。ここでは、もっと一般的な空間について 3 条件の関係について調べてみたい。

1.  $D$  を解析多様体で  $A$  は  $H(D)$  ( $: D$  上の正則関数全体) の部分空間とする。正則写像  $\varphi: D \rightarrow D$  はすべての  $f \in A$  に対して  $f \circ \varphi \in A$  となるものとする。このとき

$$C_\varphi: A \rightarrow A$$

を  $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$  により定義し  $A$  上の合成作用素と呼ぶ。 $A$  が Banach 空間で  $C_\varphi$  が有界のとき、 $\dim \ker C_\varphi < \infty$ ,  $\dim A/C_\varphi(A) < \infty$  であるとき  $C_\varphi$  は Fredholm であるという (以後、(F) と略す)。一般に、(F)、可逆であること (以後、(I) と略す) と、 $\varphi$  が  $D$  から  $D$  への双正則写像であること (以後、(A) と略す) の間の関係は次のようである。

i) (I)  $\Rightarrow$  (F)、ii) (F)  $\not\Rightarrow$  (I)、iii) (I)  $\not\Rightarrow$  (A)、iv) (A)  $\not\Rightarrow$  (F)

よって、(F) と (A) や (I) と (A) はそれぞれ必要条件でも十分条件でもない。

例 1.  $\Delta = \{z \in C : |z| < 1\}$ 、 $\varphi(z) = \frac{z+1}{z+2}$  とする。 $\Delta$  上の点列  $\{z_n\}$  を  $z_0 = 0$ ,  $z_{n+1} = \varphi(z_n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) により定義する。すると、 $\{z_n\}$  は Blaschke の条件  $\sum(1 - |z_n|) < \infty$  を満たしている。次に、

$$A = \{f \in H^\infty(\Delta) : f(z_n) = 0, n = 1, 2, \dots\}$$

と定めると  $A$  は一様ノルムに関する Banach 空間である。ここで、 $H^\infty(\Delta)$  は  $\Delta$  上の有界正則関数全体よりなる Hardy 環である。すると  $C_\varphi$  は  $A$  上の合成作用素であって  $\dim A/C_\varphi(A) = 1$  である。よって  $C_\varphi$  は Fredholm であって可逆でない。

例 2.  $\Delta$ 、 $\varphi$  は例 1 と同じで  $\bar{\Delta} = \{z \in C : |z| \leq 1\}$  とする。 $\Delta$  の境界  $\partial\Delta$  上の点列  $\{z_0^{(k)}\}_{k=1}^\infty$  は、 $m, n, k_1, k_2$  にたいして  $\varphi^m(z_0^{(k_1)}) \neq \varphi^n(z_0^{(k_2)})$  を満たしているものとする。ただし、 $\varphi^m$  は  $\varphi$  の  $m$  回の合成  $\varphi \circ \dots \circ \varphi$  を表す。各  $k$  にたいして  $z_n^{(k)} = \varphi^n(z_0^{(k)})$  と定める。 $\bar{\Delta}$  上の円板環 ( $\bar{\Delta}$  上解析的多項式で一様近似できる連続関数全体) を  $P(\bar{\Delta})$  で表す。

$$A = \{f \in P(\bar{\Delta}) : f(z_n^{(k)}) = 0, n = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots\} | \Delta$$

と定める。このとき、 $C_\varphi$  は  $A$  上の合成作用素であって  $\dim A/C_\varphi(A) = \infty$  である。よってこれは  $\varphi$  が  $\Delta$  上の双正則写像であるが  $C_\varphi$  は Fredholm とならないような例を与えている。

例 3.  $\varphi, \{z_n\}$  は例 1 と同じものとする。 $D = \Delta \setminus \{z_n\}$  とする。 $A = H^p|D$  とする。ただし、 $H^p$  は  $\Delta$  上の Hardy 空間である。すると、 $\psi = \varphi^{-1}|D$  に対して  $C_\psi$  は  $A$  上の可逆な合成作用素であるが  $\psi(D) = D \setminus \{0\}$  である。つまり  $\psi$  は  $D$  上の双正則写像ではない。

例 4.  $D = \{z \in \Delta : \operatorname{Re} z > 0\}$  とし  $\varphi$  は例 1 と同じとする。  $A = H^p|_D$  とする。このとき、  $C_\varphi$  は可逆であるが  $\varphi$  は  $D$  上の双正則写像ではない。

例 3、例 4 は一見特殊な例にも見えるが、次の定理 1 の (a)、(b) の特別な場合になっている。以下では、Banach 空間とは限らない正則関数の空間を扱う。さらに、 $(F')$  で条件  $\dim A/A \circ \varphi < \infty$  を表す。  $A$  が Banach 空間のときは  $(F) \rightarrow (F')$  である。

定理 1.  $\Omega$  は  $n$  次元解析多様体で  $D$  はその相対コンパクトな領域で次を満たすものとする：  
 $D$  の  $\Omega$  における境界  $\partial D$  の各点  $z$  と  $z$  の  $\Omega$  の開近傍  $V$  にたいして  $V' \subset V$  で  $V' \cap D$  が連結であるような  $z$  の開近傍  $V'$  が存在する。  $A$  は  $H(D)$  :  $D$  上の正則関数全体の部分空間で次の 2 条件 1)、2) を満たすものとする。

1)  $A$  の  $n$  個の直積  $A^n = \{(f_1, \dots, f_n) : f_i \in A\}$  の中の列  $\{F^{(i)}\}_{i=1}^\infty$  で各  $F^{(i)}$  は  $\Omega$  まで正則に拡張できて、  $\{F^{(i)}\}_{i=1}^\infty$  から作った任意の一次結合  $\sum a_i f^{(i)}$  に対して  $D$  の開集合  $U$  が存在して、  $\sum a_i F^{(i)}$  はその上で単葉となる。

2)  $D$  の任意の有限集合  $K$  に対して

$$\dim A|_K = K \text{ の要素の個数}$$

が成立する。

$\varphi$  は  $D$  から  $D$  への正則写像で  $A \circ \varphi \subset A$ 、  $\dim A/A \circ \varphi < \infty$  を満たすとする。すると、  $\varphi$  は単葉になる。さらに、次の (a) または (b) が成立する。

(a)  $D$  の thin set  $E$  (空集合にもなりうる) が存在して、  $\varphi$  は  $D$  から  $D \setminus E$  の上への双正則写像である。

(b)  $\partial D$  の点  $z_0$  と  $z_0$  の ( $\Omega$  での) 開近傍  $V_{z_0}$  と正則関数  $\tilde{\varphi} : D \cup V_{z_0} \rightarrow D$  で  $\tilde{\varphi}|_D = \varphi$  なるものが存在する。

注)  $\Omega = C^n$ 、 $A$  が各座標関数  $z_1, \dots, z_n$  の多項式を含んでいるときは、 $F^{(i)} = (z_1^i, \dots, z_n^i)$  と考えれば 1) は満たされ、また、2) も成立する。(ちなみに、定理 1 において  $A$  が定数関数を含んでいる場合は  $A$  が  $D$  の点を分離することと要素が 2 つの  $K$  について 2) の等式が成立することは同値である。よって、例 3、例 4 の  $A$  は定理 1 の条件を満たしている。

略証: まず、2) などより  $\varphi$  が  $D$  上単葉であることがわかる。そこで、(a) または (b) が成立することを示す。まず、 $\dim A/A \circ \varphi < \infty$  より  $\dim A^n/A^n \circ \varphi = l < \infty$  となるので  $u = (u_1, \dots, u_n) \in A^n$  と  $(a_1, \dots, a_{l+1}) \in C^{(l+1)}$  で

$$\sum_{i=1}^{l+1} a_i F^{(i)} = u \circ \varphi$$

となるものが存在する。 $f = \sum a_i F^{(i)}$  とおく。つまり  $f = u \circ \varphi$  である。

$M = \{z \in D : z \text{ の } D \text{ 内の開近傍 } U_z \text{ と } C^n \text{ の領域 } \Phi \text{ と}$

$\Phi$  から  $U_z$  への双正則写像  $\zeta$  が存在して

$$\det \left( \frac{\partial u_i \circ \zeta}{\partial w_j} \right) \circ \zeta^{-1}(z) = 0\}$$

とおく。ただし、 $\det \left( \frac{\partial u_i \circ \zeta}{\partial w_j} \right)$  は  $\Phi$  の座標系  $(w_1, \dots, w_n)$  に関する  $(u_1 \circ \zeta, \dots, u_n \circ \zeta)$  の complex Jacobian である。すると、 $M$  は  $(\Phi, \zeta$  の選び方によらず) well-defined である。

1) より  $f$  は  $D$  のある開部分集合上単葉なので  $M = D$  とはなりえず、よって  $M$  は  $D$  の thin set (空集合の場合も含めて) である。つぎの 2 つの場合を考察する。

a)  $\partial(D \setminus \varphi(D)) \subset M$  (ここでは、 $\partial$  は  $D \setminus \varphi(D)$  の  $D$  における境界を意味する。)

b)  $\partial(D \setminus \varphi(D)) \not\subset M$ .

a) の場合が (a) に対応し、b) が (b) に対応する。まず a) の場合は  $D \setminus M$  が連結であることから  $D \setminus \partial(D \setminus \varphi(D))$  も連結となりこのことから  $D \setminus \varphi(D) = \partial(D \setminus \varphi(D))$  となつ

てよって  $D \setminus \varphi(D) \subset M$  である。そこで  $E = D \setminus \varphi(D)$  とおけば  $E$  は thin set で  $\varphi$  は  $D$  から  $D \setminus E$  への双正則写像となる。次に、b) の場合を考える。この場合は  $w_0 \in \partial(D \setminus \varphi(D))$  と  $w_0$  の  $D$  内での開近傍  $U_{w_0}$  で  $u|_{U_{w_0}}$  が  $U_{w_0}$  より  $u(U_{w_0})$  への双正則写像となるようなものが存在する。 $\{w_n\}$  を  $\varphi(D) \cap U_{w_0}$  の点列で  $w_n \rightarrow w_0$  なるものとする。 $\varphi$  が単葉なので  $z_n = \varphi^{-1}(w_n)$  が well-defined で  $z_n \rightarrow z_0$  なる  $z_0 \in \partial D$  が存在すると仮定して一般性を失わない。条件 1) より  $f$  は  $\Omega$  上の正則写像  $\tilde{f}$  に拡張される。すると  $\tilde{f}(z_n) = u \circ \varphi(z_n) = u(w_n)$  より  $\tilde{f}(z_0) = u(w_0)$  となる。 $V = \tilde{f}^{-1}(u(U_{w_0}))$  とおくと、 $u$  が  $U_{w_0}$  で単葉なので  $u(U_{w_0})$  が開集合となる。よって  $V$  は  $z_0$  の開近傍となる。 $D$  に関する条件より  $z_0$  の開近傍  $V_{z_0}$  で  $V_{z_0} \subset V$ 、 $V_{z_0} \cap D$  は連結なるものが存在する。そこで  $\varphi_0 : V_{z_0} \rightarrow D$  を  $\varphi_0(z) = (u|_{U_{w_0}})^{-1} \circ \tilde{f}(z)$  により定めると  $\varphi_0$  は正則で  $V_{z_0} \cap D$  が連結なので  $\varphi_0|_{V_{z_0} \cap D} = \varphi|_{V_{z_0} \cap D}$  となる。そこで

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi(z), & z \in D \\ \varphi_0(z), & z \in V_{z_0} \end{cases}$$

とおけば  $\tilde{\varphi}$  は  $V_{z_0} \cup D$  で well-defined な正則関数で  $\tilde{\varphi} = \varphi$  となる。

定理 1 より Schwartz[4]、Cima-Thomson-Wogen[2] と同様な結果が広い範囲の空間に対して成立することが分かる。

系 1.  $D$  は compact bordered Riemann 面または polydisc または  $C^2$  級の強擬凸領域とする。 $D$  上の正則関数からなる Banach 空間  $A$  が  $A \supset H(D) \cap C(\bar{D})$  を満たし、 $D$  から  $D$  への任意の双正則写像  $\psi$  について  $A \circ \psi \subset A$  であるとする。ただし、 $C(\bar{D})$  は  $D$  の閉包 (compact bordered Riemann 面のときは  $D \cup (D \text{ の borders })$ ) 上の複素値連続関数全体である。 $\varphi$  が  $D$  から  $D$  への正則写像で  $A \circ \varphi \subset A$  とするとき、 $(F')$ 、 $(F)$ 、 $(I)$ 、 $(A)$  は互いに同値である。

略証: まず  $(I) \implies (F)$ 、 $(F) \implies (F')$  は自明である。次に、 $(F') \implies (A)$  を示す。 $A$  は

定理 1 の条件を満たすことが分かりそのことより (a) または (b) が成立する。一方  $A \subset H(D) \cap C(\bar{D})$  なので各  $z \in \partial D$  に対して  $\dim A/B_z = \infty$  となる。ここで  $B_z = \{f \in A : f \text{ は } z \text{ で正則}\}$  である。このことから実は (b) は起こり得ないことが分かる。さらに、この系の  $D$  においては  $D$  と  $D \setminus E$  が双正則同値となる thin set  $E$  は空集合に限ることが分かる。つまり (A) が成立する。最後に (A)  $\implies$  (I) は  $A$  が  $D$  上の双正則写像に関して不変であることから分かる

系 1 の条件を満たす  $A$  は例えば  $H^p$  ( $0 < p \leq \infty$ )、Bergman 空間、Bloch 空間等たくさんある。

#### REFERENCES

1. P. S. Bourdon, *Fredholm multiplication and composition operators on the Hardy space*, Integral Eq. and Operator th. **13** (1990), 607–610.
2. J. A. Cima, J. E. Thomson and W. R. Wogen, *On some properties of composition operators*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974), 215–220.
3. O. Hatori, *Fredholm composition operators on a space of holomorphic functions*, preprint.
4. H. J. Schwartz, *Composition operators on  $H^p$* , Thesis, University of Toledo, 1969.